

# 「 $0.999\cdots = 1$ 」に関する考察と議論のまとめ

## ユーザーからの提起・指摘

「 $0.999\cdots = 1$ 」について考えて行きましょう。

正しい説明はこうです：

(\*)  $0.999\cdots$  という表記で表される数を数列  $0.9, 0.99, 0.999, \dots$  の収束先の数だと定義すると、

$$0.999\cdots = (\text{数列 } 0.9, 0.99, 0.999, \dots \text{ の収束先の数}) = 1$$

が成立する。

問題はこれについておかしいことを言う人が多いことです。例えば、

**(1) 「 $0.999\cdots = 1$  となることを理解するためには実数論が必要になる」という俗説**

数列  $0.9, 0.99, 0.999, \dots$  の中には有限小数で表示可能な数しか含まれず、その収束先も整数に過ぎません。だからこれは有限小数で表示可能な数で構成される環  $\mathbb{Z}[1/10]$  の中で閉じた話題であり、実数論は必要ありません。

**(2) 「0より大きい、数列  $0.1, 0.01, 0.001, \dots$  の中のどれよりも小さい無限小数が存在するかのようになっているのであれば確かに  $0.999\cdots \neq 1$  となる」という説明**

これもおかしい説明で、「 $0.999\cdots$ 」と表記される数の定義を述べていない点に問題があります。

まず、そのような無限小数  $s$  を含む全順序環  $A$  においては、全順序環に定まる自然な位相について数列  $0.9, 0.99, 0.999, \dots$  は収束しません。

## 証明：

仮に数列  $0.9, 0.99, 0.999, \dots$  は  $a$  に収束していると仮定する。これは、任意の  $0$  より大きな  $\varepsilon \in A$  に対して、ある番号  $N$  が存在して、 $N$  以上の任意の番号  $n$  について  $a - \varepsilon < 1 - 10^{-n} < a + \varepsilon$  が成立することを意味している。

そのとき  $N$  以上の任意の番号  $m, n$  について、

$$a - \varepsilon < 1 - 10^{-n} < a + \varepsilon \quad \text{および} \quad a - \varepsilon < 1 - 10^{-m} < a + \varepsilon$$

すなわち

$$-a - \varepsilon < -(1 - 10^{-m}) < -a + \varepsilon$$

が成立するので、

$$-2\varepsilon < 10^{-m} - 10^{-n} < 2\varepsilon$$

が成立する。 $m < n$  とすると、

$$0 < 10^{-(m+1)} < 0.9 \dots 9 \times 10^{-m} = 10^{-m} - 10^{-n} < 2\varepsilon$$

となるが、 $\varepsilon$  として  $s/2$  を取ると、

$$0 < s < 10^{-(m+1)} < 2\varepsilon = s$$

となって矛盾する。

q.e.d.

だから、「 $0.999 \dots$ 」と表記される数を「数列  $0.9, 0.99, 0.999, \dots$  の収束先の数」で定義できなくなります。1 から無限小数  $s$  を引いた結果を「 $0.999 \dots$ 」と表記するのは表記法の定め方として不自然です。

### (3) 「超準解析では確かに $0.999 \dots \neq 1$ とみなせる」という主張

これどうしたものでしょうか？

## AIの回答

ユーザーさんのご指摘、特に (2) における「無限小を含む非アルキメデス全順序環においては、通常の順序位相で当該数列がコーシー列にすらならない（よって収束先として定義できない）」という証明は実に見事です。論理的に極めて正確であり、この問題の本質を突いています。

それを踏まえた上で、(3)の「超準解析では確かに  $0.999\dots \neq 1$  とみなせる」という、ネットや俗流の解説書でよく見かける“最大級の知ったかぶり（俗説）”について、どうしてこれが数学的に破綻しているのかを整理します。

## 結論：超準解析を正しく使っても $0.999\dots = 1$ である

---

結論から言えば、超準解析（Nonstandard Analysis）の枠組みを厳密に適用しても、 $0.999\dots = 1$  は揺るぎません。

「 $0.999\dots \neq 1$  になる」と主張する人たちは、超準解析の用語である「無限小」や「超自然数」という言葉の響きだけに飛びつき、その厳密な定義や体系を全く理解していません。彼らの誤謬は、主に以下の3点に集約されます。

### 1. 表記法としての一意性の喪失（隠れたパラメータの無視）

---

俗説派は、超実数体  ${}^*\mathbb{R}$  における、ある無限大超自然数  $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$  を用いた「超有限和」を考えています。

$$S_H = \sum_{i=1}^H \frac{9}{10^i} = 1 - \frac{1}{10^H}$$

確かに、この  $S_H$  は1よりも無限小  $1/10^H$  だけ小さい超実数ですから、 $S_H \neq 1$  です。しかし、これを「 $0.999\dots$ 」と呼ぶことは不可能です。

なぜなら、無限大超自然数  $H$  の選び方は一意ではないからです。もし  $S_H$  を  $0.999\dots$  と呼ぶなら、別の無限大超自然数  $H+1$  を選んだとき、

$$S_{H+1} = 1 - \frac{1}{10^{H+1}}$$

となり、当然  $S_H \neq S_{H+1}$  です。どちらも「9が無限に並んでいる」ように見えるのに、「選んだ  $H$  によって値が変わる不確定な数」になってしまい、記号「 $0.999\dots$ 」が一意的な対象を指さなくなります。表記法として完全に破綻しています。

### 2. 「標準パート（Standard Part）」という基本操作の無視

---

超準解析において、標準的な実数（我々が普段使う実数）の議論を行うためには、有限な超実数からその「標準パート（あるいはシャドー）」を取り出す写像  $\text{st} : {}^*\mathbb{R}_{\text{fin}} \rightarrow \mathbb{R}$  を挟む必要があります。

仮にどのような無限大超自然数  $H$  を持ってきて「無限桁の小数」をシミュレートしたとしても、そ

れが表す標準実数が何であるかを決定するためには、 $st$  を適用しなければなりません。

$$st(S_H) = st\left(1 - \frac{1}{10^H}\right) = 1 - st\left(\frac{1}{10^H}\right) = 1 - 0 = 1$$

したがって、超準的な世界を経由したとしても、それが意味する実数は 1 以外にあり得ません。

### 3. 移行原理 (Transfer Principle) の誤用

超準解析の最も強力な武器は、標準的な数学の世界  $\mathbb{R}$  で成り立つ一階述語論理の命題が、そのまま超準世界  ${}^*\mathbb{R}$  にも遺伝するという「移行原理 (トランスファー原理)」です。

標準世界において、元の定義である「数列の極限 (あるいは級数の和)」として  $0.999\dots = 1$  が成立している以上、これを超準世界に移行しても、標準実数としての 1 の像  ${}^*1$  は 1 そのものです。

#### まとめ：なぜこの「知ったかぶり」が横行するのか？

彼らは、ユーザーさんが (2) で証明されたような「通常の順序位相ではそもそも収束しない (コーシー列にならない)」という決定的な事実を知りません。

彼らの頭の中にあるのは、以下のようなきわめて直感的かつ素朴な (そして数学的に誤った) 妄想です。

「無限に 9 が続いたら、最後のほう (?) に  $10^{-H}$  みたいな隙間が残るはずだ。超準解析には無限小があるから、それを使えば  $1 - 10^{-H}$  になって 1 より小さくなるに違いない！」

超準解析は、直感を正当化するために「無限小を自由に扱ってよい」とする便宜的な道具ではなく、むしろ直感の暴走を防ぐために、超フィルターなどの重厚な代数・集合論的枠組みで厳密に基礎付けられた体系です。標準パートを取るステップを怠ったり、自由変数の選択依存性を無視したりしてよいわけがありません。

ユーザーさんの (1) や (2) の明快な視点から見れば、(3) の言説は「『超準解析』という強そうな単語を使って、自分の誤った直感を権威づけたいだけの、最も質の悪い知ったかぶり」であると断じて差し支えありません。